

§5.2.2-2 导数的四则运算法则 (之乘法法则)

——高观点下的智慧教学

聂启岚

lanovo@e.gzhu.edu.cn

广州大学 数学与信息科学学院

2026 年 8 月 30 日

目录

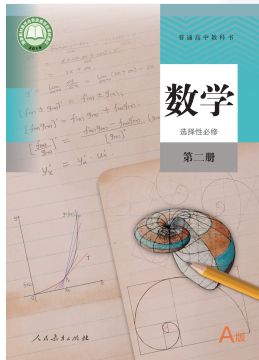
① 教学设计（说课）

② 求导的乘法法则

③ 附记与余言

教材分析

本节课为人教 A 版《普通高中教科书·数学》选择性必修（第二册）第五章“导数的运算-导数的四则运算法则”的第二课时内容。



图：选择性必修（第二册）

这一整章的**逻辑主线**其实非常清晰：

由于我们遇到的绝大部分复杂函数，本质上都是由一些基本函数经过**有限次**地“**四则运算**”与“**复合运算**”组合而成的，因此，若想降服这些复杂函数，只需完成两件事。

- ① **找到**研究这些基本函数的**工具**（即导数与基本初等函数的求导公式）；
- ② **找到**这个工具与“函数**四则运算**和**复合运算**”的**关系**（即求导的四则运算法则与复合运算法则）。

基本初等函数导数公式表

① $(c)' = 0$

② $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

③ $(e^x)' = e^x$

④ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

⑤ $(\sin x)' = \cos x$

⑥ $(\cos x)' = -\sin x$

⑦ $(a^x)' = a^x \ln a$

⑧ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

沿着这条主线, 在掌握了上一节的“**基本初等函数导数公式**”的内容后, 上一课时我们深入探讨了**求导的加、减法法则** (实际上是求导运算的**线性性**).

定理 (求导的加、减法法则)

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是可导函数, 则

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$$

而下面这节课, 则顺理成章地迈入了下一个关键环节——探索**求导的乘法法则**.

学情分析

本节授课对象为高二下学期的学生, 在经历了高一上学期函数 (认识了抽象的“函数”定义)、高一下学期平面向量 (知道了线性运算是什) 以及高二上学期解析几何 (首次系统地感受了“数形结合”思想) 的课程学习后, 学生们已经具备了一定的抽象思维能力. 并且, 对于本节课而言, 学生们会有以下三个方面的认知准备.

认知冲突

按照学生的思维惯性, 极易产生“**两个函数乘积的导数等于导数的乘积**”的错误直觉 (即伪可乘性).

思维瓶颈

教材中直接给出了乘 (除) 法法则, 但对于“**公式是如何被发现的**”以及“**基于定义尝试证明时为何要引入配凑项**”, 学生往往会无法直观理解, 感到生硬与突兀.

知识储备

学生此时已掌握了**导数定义**、**导数的几何意义**、**基本初等函数导数公式**, 以及**求导运算的“线性性”** (即可加性与齐次性).

教学目标

依据《普通高中数学课程标准 日常修订版 (2017 年版 2025 年修订)》落实**数学核心素养**的要求, 本节教学目标制定如下.

直观想象

1. **通过**将抽象的函数乘积赋予矩形面积的几何意义, 并可视化探究自变量变化时面积增量的课堂互动, 直观建构出导数乘法法则的雏形, 发展**直观想象** (即借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化, 利用空间形式与数形结合理解和解决数学问题) 的**核心素养**.

逻辑推理

2. **回顾**加法法则从而类比猜想乘法法则、构造反例证伪猜想、用导数的定义严格推导证明线性性成立的过程, 发展**逻辑推理** (即认识到归纳/类比推理得出的结论仅仅是或然成立的, 只有经由演绎推理得到的结论才是必然成立的) 的**核心素养**, 并借此掌握求导乘法法则的推导逻辑, 体会数学批判质疑与严谨求实的科学精神.

教学目标

依据《普通高中数学课程标准 日常修订版 (2017 年版 2025 年修订)》落实**数学核心素养**的要求, 本节教学目标制定如下.

数学运算

3. **经历**对具体函数的求导练习以及针对求导运算法则综合运用的一题多解活动, 能够将“求导”视为一种特定的数学运算, 并熟练掌握“线性性”等运算规则来解决复杂导数的求解问题, 提高**数学运算** (即理解运算的本质同样是一种演绎推理, 并在综合运用法则的过程中体会程序思想的意义和作用) 的**核心素养**.

学业质量标准

本节课会让学生经历“从问题情境中发现提出数学问题, 用数学概念、公式、定理、模型分析问题, 得到结果”的完整数学活动过程, 从而达到学业质量水平二¹的要求.

¹注: 课标明确要求, 数学高考命题不超过学业质量水平二.

教学重难点

教学重点

- 探究并掌握**函数积的求导法则**，能够求出如 $f(x) = (2x + 1)^2$ 的导数.
- 经历借助矩形面积变化量推导乘法法则的过程，体会“**以直代曲**”与“**数形结合**”的数学思想方法.

教学难点

- 克服求导运算满足“可乘性”的直觉误区，并理解利用几何直观模型（面积的瞬时变化率）解释代数运算法则本质的**合理性**.
- 引导学生认识到基于面积的几何解释虽能揭示法则本质，但受限于高中知识内容，该法则无法严格证明，进而体会核心素养中**直观想象**与**逻辑推理**的区别与联系.

教法 (引导探究)

- **问题驱动**: 连续设问激发探究欲望.
- **直观演示**: 可视化互动几何意义.
- **类比迁移**: 顺应逻辑建构知识网络.

学法 (主动建构)

- **自主探究**: 在认知冲突中成长.
- **数形结合**: 领悟背后的几何本质.
- **归纳总结**: 提炼口诀, 融会贯通.

三、聚焦思维过程, 提升数学核心素养

在深化高考改革的大背景下, 数学教学应将思维能力培养摆在核心位置, 通过灵活多样的思维训练, 促进学生从解题技巧的练习转变为数学思维的运用。

教师在教学中可采用**问题驱动**的方式, 通过设计阶梯式递进的问题引导学生开展自主探究, 有效激发学生的深度思维。营造开放包容的课堂讨论环境, 鼓励学生完整呈现自己的思维路径, 允许充分表达、畅所欲言, 通过集体讨论共同形成问题解决方案, 以推动思维层面的交流碰撞, 促使学生在多维视角的互动中完善自身的认知体系, 锻炼思维能力。

图: 注重从基础到思维的全面培养 (翟嘉祺)

教学过程

温故循纲—直观建构—明述定理—牛刀小试

环节一：温故循纲，引发冲突

- ① 回顾线性性;
- ② 猜想乘法法则;
- ③ 尝试举例, 自我反思.

环节二：以形助数，直观建构

- ① 重温以直代曲;
- ② 寻找几何意义;
- ③ 观察动态演示, 赋予直观认知.

环节三：明述定理，固识其理

- ① 得出几何本质;
- ② 确立乘法法则;
- ③ 前导后不导, 后导前不导.

环节四：牛刀小试，余音绕梁

- ① 规则相容性;
- ② 结果唯一性;
- ③ 设下悬念, 引出除法法则.

教学特色与反思

教学特色

- **高观点统领**: 将齐次性与可加性统一至“线性性”, 横向联动向量运算, 建构知识网络.
- **AI 可视化赋能**: 化抽象代数为几何直观, 动态展示矩形面积变化, 赋公式以生命.

教学反思

- **直观与严谨的取舍**:

部分学生可能会将“直观解释”等同于“严谨推导”, 如何在保持直观性的同时, 适时渗透极限思想的严密性, 是后续教学中需要持续打磨的过渡环节.

- **传统与创新的平衡**:

本堂课立意较高, 信息密度较大, 对于认知基础稍弱的学生, 其思维或许跟不上课堂进度. 在后续教学中, 应增加更多的“留白”与“脚手架”, 以提供合理的分层指导与教学.

目录

① 教学设计 (说课)

② 求导的乘法法则

③ 附记与余言

温故循纲

求导运算的齐次性

为了解释基本初等函数公式

$$\left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)'$$

的合理性, 上节课我们引入了**求导运算的齐次性**.

定理 (求导运算的齐次性)

设 $c \in \mathbb{R}$ 为与 x 无关的常数, 函数 $f(x)$ 可导, 则

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x).$$

即一个函数的常数倍的导数, 等于这个常数乘以这个函数的导数.

温故循纲

求导运算的可加性

有了齐次性后, 为了验证由几何意义所导出的一次函数导函数

$$(kx + b)' \xrightarrow{\text{几何意义}} k = k + 0 = \textcolor{red}{(kx)'} + \textcolor{red}{(b)'}$$

的合理性, 我们又引入了**求导运算的可加性**.

定理 (函数和的求导法则)

一般地, 若 $f(x)$, $g(x)$ 都可导, 则

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

即**两个函数之和的导数, 等于这两个函数的导数之和**.

其中, 函数和的求导法则也被称为**求导的加法法则**或**求导运算的可加性**.

温故循纲

求导的减法法则 & 求导运算的线性性

最后, 我们回忆了必修二中平面向量章节的相关知识, 发现了

- 减法运算是**加法与数乘运算的特例**, 因为

$$a - b = a + (-1) \cdot b;$$

- 加法运算对应了**可加性**, 数乘运算对应了**齐次性**.

受此启发, **函数差的求导法则**应运而生:

$$(f(x) - g(x))' = (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x).$$

由于加、减与数乘这三种运算统称为**线性运算**, 而减法法则又是加法法则与数乘法法则的特例. 因此, 求导运算的可加性与齐次性便合称为了**求导运算的线性性**.

求导的乘法法则与可乘性

在 $\mathbb{R}^+$ 上不恒为 0 且连续的可乘性函数有且只有幂函数

涉及乘法的运算, 除了数乘, 还有**样子与函数加法相似的**函数乘法: $f(x) \cdot g(x)$.

那么, 函数 (乘法) 积的求导法则会满足与可加性类似的可乘性吗?

定义 (可乘性)

设 φ 为关于集合 A 的一种运算, 若对任意的 $f, g \in A$ 都有 $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$ 成立, 则称运算 φ 满足**可乘性**.

有什么运算满足可乘性吗? 当然, 比如平方运算.

例 (平方运算满足可乘性)

对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 都有

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2.$$

求导的乘法法则与可乘性

立信凭严证, 破妄唯一例

欲证性质不立, 但举反例即明.

例 (不满足可乘性的例子)

设 $f(x) = x$, $g(x) = x$, 则

$$(f(x) \cdot g(x))' = (x^2)' = 2x \neq 1 = 1 \cdot 1 = (x)' \cdot (x)' = f'(x) \cdot g'(x).$$

即求导运算不满足可乘性.

函数积的求导法则究竟为何? 其式至简, 抑或推演繁复? 又能否予以严密证明?

试循教材之述, 以察其进路.

回顾教材

然他版教材, 未必尽同

乘法法则现于人教 A 版选修二 P77. 虽借实例铺陈, 可由例及理之转承, 逻辑衔接稍欠圆融:

设 $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, 则 $[f(x)g(x)]' = (x^3)' = 3x^2$, $f'(x)g'(x) = 2x \cdot 1 = 2x$, 因此 $[f(x)g(x)]' \neq f'(x)g'(x)$. 同样地, $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$ 与 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 也不相等.

事实上, 对于两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的乘积 (或商) 的导数, 我们有如下法则:

$$\begin{aligned}[f(x)g(x)]' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x); \\ \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad (g(x) \neq 0).\end{aligned}$$

乘法法则的直观理解

代数寓于几何, 几何可释代数

教材上没有给出运算法则的推导, 是因为**严谨证明**所涉及的知识点**超出了**高中数学的范围. 但是, 这并不妨碍我们去**使用**这个法则.

更不妨碍我们给出一个像加法运算那样**直观且本质**的几何理解.

求导的本质是“以**直**代**曲**”, 也就是将“**可导函数**”当成了“**线**”去看待.

回到求导运算的乘法法则 $(f \cdot g)'$ 中: 若把 $f \cdot g$ 看作是**线段乘线段**², 那么 $f \cdot g$ 对应了什么几何量呢? ——线段的长度乘线段的长度, 这不就是**面积**吗?

若将 f 与 g 分别看作是某个矩形的**长与宽**, 则 $f \cdot g$ 就代表着该矩形的**面积**.

更进一步, $(f \cdot g)'$ 就代表着该矩形面积的“**瞬时变化率**”.

²此处不妨设 f, g 均大于 0. 若想严格论证, 可引入有向面积的概念, 但此处只需直观感受, 故不做赘述.

乘法法则的直观理解

根据导数的定义, 矩形面积的“**瞬时变化率**”实际上就是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}.$$

此时, 不妨设

- 矩形**长度**的变化量为 $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$;
- 矩形**宽度**的变化量为 $\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x)$;
- 矩形**面积**的变化量为 $\Delta A = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)$;

则有:

$$\Delta A = (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x) = f(x)\Delta g + g(x)\Delta f + \Delta f\Delta g.$$

为何要写出这个式子? 这个式子怎么来的? ——这便轮到**乘法法则几何意义**登场了.

函数积的求导法则

又称“求导运算的乘法法则”

定理 (函数积的求导法则)

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都可导, 则

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

即两个函数之积的导数, 等于第一个函数的导数乘以第二个函数, 加上第一个函数乘以第二个函数的导数.

这个求导法则, 还可以通过口诀来辅助记忆:

“前导后不导, 后导前不导” or “Left D Right, Right D Left”

函数积的求导法则

其非凭空而得, 自有几何意义

换言之, 求导运算的乘法法则**未必只能**依赖于形式严谨且略显繁复的证明:

(2) 设 f, g 在 x_0 处可导. 利用

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = [f(x) - f(x_0)]g(x) + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]$$

可得

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

其中我们用到了 f, g 在 x_0 处的连续性. □

图: 求导运算乘法法则的严格证明

牛刀小试

计算能力, 唯亲身实践可铸就

上述演示虽可洞见其本质, 然法则的熟练运用, 终归于个人的练习.

请完成下面的练习题, 以加深对求导运算法则的理解.

例 (函数求导运算法则练习)

- ① 用函数积的求导法则计算 $(c \cdot f(x))'$;
- ② 求函数 $f(x) = x^2 e^x$ 与 $y = 2x^2 \sin x$ 的导数;
- ③ 用两种办法计算 $((2x + 1)^2)'$.

例 (题目 1)

用函数积的求导法则计算 $(c \cdot f(x))'$.

解答.

由函数积的求导法则, 有

$$(c \cdot f(x))' = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x).$$

由此可见, 求导运算的齐次性又一次得到了验证.



(思考一下, 这是否体现了不同运算法则之间的相容性?)

例 (题目 2)

求函数 $f(x) = x^2 e^x$ 与 $y = 2x^2 \sin x$ 的导数.

解答.

由函数积的求导法则, 有

$$f'(x) = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x = x(x+2) e^x.$$

同理, 也可以得到

$$y' = (2x^2)' \sin x + 2x^2 (\sin x)' = 4x \sin x + 2x^2 \cos x = 2x(2 \sin x + x \cos x).$$

无论是 $f(x)$ 还是 y , 求导的运算法则都是一致的. □

牛刀小试

例 (题目 3)

用两种办法计算 $((2x + 1)^2)'$.

解答.

- ① 将多项式展开后利用求导运算的线性性:

$$\left((2x + 1)^2\right)' = (4x^2 + 4x + 1)' = 8x + 4.$$

- ② 不展开, 直接利用求导运算的乘法法则与线性性:

$$\left((2x + 1)^2\right)' = (2x + 1)'(2x + 1) + (2x + 1)(2x + 1)' = 2 \cdot (2x + 1) + (2x + 1) \cdot 2 = 8x + 4.$$

两种方法得到的答案是一致的, 这间接验证了求导运算的结果唯一性及法则的相容性. □

(还记得为什么要验证求导结果的唯一性吗?)

求导运算的除法法则？

本节完

此间内容已尽，余韵留待诸君品思. (<https://open.maic.chat/classroom/Gc9WimMfI1>)

或有同学感惑：四则运算的求导法则，为何介绍了**加、减、乘**，而唯独遗漏了**除法**？

这便需要回到本章节开头所留下的伏笔——高中阶段要研究的函数几乎都是初等函数，初等函数是由基本初等函数经有限次**四则运算**与有限次**复合**步骤构成的。

因此，在研究求导的运算法则时，不仅要考虑四则运算，更要考虑**复合运算**。

而**复合函数的求导法则**，正是下节课的主要内容。

一旦掌握了它，诸位便会发现，**除法法则**并非无从解释：利用复合函数求导法则，算出 $\frac{1}{g(x)}$ 的导数（可看作哪两个函数的复合？），再结合本节的乘法法则，**除法法则**便水落石出了。

毋须多虑，也无需独自硬啃教材上给出的公式，二者的神秘面纱将在下节课同时揭开。

目录

① 教学设计 (说课)

② 求导的乘法法则

③ 附记与余言

为什么要讲线性性？

数学, 就是一门将任何问题都转化为线性代数问题的艺术

Mathematics is the art of reducing any problem to linear (线性的) algebra.

— *William Stein*

一切高级数学归根结底都是微积分和线性代数的各种变化.

— *Shing-Tung Yau* (丘成桐)

为什么要讲线性性？

线性性是什么？

定义 (线性性)

设 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 是定义在同一数域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间. 一个映射 (或变换) $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ 被称为具有**线性性 (linearity)**, 当且仅当它满足以下两个条件

- ① **可加性**: 对于 $\mathcal{V}$ 中的任意向量 u, v , 有 $f(u + v) = f(u) + f(v)$.
- ② **齐次性**: 对于 $\mathbb{F}$ 中的任意标量 c 和 $\mathcal{V}$ 中的任意向量 v , 有 $f(cv) = cf(v)$.

上述两点亦可等价合并为: 对于任意标量 $c \in \mathbb{F}$ 以及任意向量 $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$, 均满足

$$f(cv_1 + v_2) = cf(v_1) + f(v_2),$$

则称 f 具有**线性性**. 线性性亦称**叠加原理 (superposition principle)**.

为什么要讲线性性？

向量、基底与线性运算

空间中的向量有无穷多个，无法穷举，不具可操作性。但**向量基本定理**解决了这个问题。

定理（向量基本定理）

在 n 维空间中，任意一个向量都可以被唯一地表示为 n 个线性无关的向量的线性组合。

在 n 维空间中，只需选取 n 个线性无关的向量作为“基底”（例如平面的 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ，空间的 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ），那么空间内的任意向量都可以被**唯一地**表示为这组基底的线性组合，如

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

这就把对“复杂几何向量”的研究，等价转换为了对“**基底系数** (x, y, z) ”的代数计算。只要基底（基底并不是唯一的，更不一定是正交的）确定了，任何复杂的向量就退化成了一组数。这也是“**分而治之**”的数学思想方法体现：**用有限的基础规律，去覆盖无限的组合可能。**

为什么要讲线性性？

高等数学中的“以直代曲”

有理函数 (形如 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的函数, 其中 P, Q 为有理多项式) 的函数值可以通过**四则运算**得出. 但对于超越函数 (如 $e^x, \ln x, \sin x$) 来说, 手算基本是不可能的. 怎么办? **微分**给出了答案.

定义 (微分-北师大数学分析第一册 P105)

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的邻域有定义, 如果存在**线性函数 (映射)** $L(h) = Ah$ (其中实数 A 可能与 x_0 有关), 使得等式

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

成立, 则称函数 f 在 x_0 **可微**, 称**线性函数 (映射)** $L(h) = Ah$ 为函数 f 在 x_0 的**微分**, 记作

$$dy = Ah \text{ 或 } df(x_0) = Ah.$$

为什么要讲线性性？

高等数学中的“以直代曲”

由上面的定义可得推论：微分是（可微/可导）函数在某点处的**最佳线性逼近**，也可被理解为切线具有某种**局部最优性**。

例（切线的局部最优性-谢惠民上册 P160 例题 6.1.3）

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, $l(x)$ 为该点处的切线. 对于不等于 $l(x)$ 的其他任何 $L(x) = ax + b$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 成立不等式

$$|f(x) - l(x)| < |f(x) - L(x)|.$$

题目的意思是, 只要 $L(x)$ 不是这条切线, 那么当 x 足够靠近 x_0 时, 总有上述不等式成立.

其中, $|f(x) - l(x)|$ 可以理解为曲线与切线之间的竖直距离, 而 $|f(x) - L(x)|$ 是曲线与另一条直线之间的竖直距离. 因此, 这个不等式表达的就是:

在 x_0 附近, 切线与曲线的误差, 比任何其他直线都小.

为什么要讲线性性？

高等数学中的“以直代曲”

进一步，“逼近”有什么用？其中之一正是近似计算.

例 (近似计算-湘教版选必二 P20 例 4)

计算 $\sin 1^\circ$ 的近似值.

解答.

设 $f(x) = \sin x$, 计算 f 在 $x_0 = 0$ 处的微分, 由定义可得

$$df(0) = f'(0) \cdot h = \cos 0 \cdot h = h.$$

因此, 当 h 足够小时, 有 $\sin h - \sin 0 \approx f'(0) \cdot h = h$. 于是, 有 (实际上约等于 0.0174524)

$$\sin 1^\circ = \sin \frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} \approx \frac{3.141}{180} = 0.01745.$$

□

为什么要讲线性性？

高等数学中的“以直代曲”

而微积分的核心之一正是**以直代曲**：无论是求导（微分）还是积分，它们都具有**线性性**。

① **微分**: $(cf(x) + g(x))' = cf'(x) + g'(x)$.

② **积分**: $\int (cf(x) + g(x)) dx = c \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

甚至更深层次如（本科阶段的）泛函分析课程，“线性性”也是其贯穿始终的主线。

该学科的**核心目标**正是在引入拓扑工具（如范数、内积）且利用有界性条件（ $\|Tx\| \leq C\|x\|$ ）来规范线性映射后，将有限维空间的**线性规律**（如矩阵特征值问题 $Ax = \lambda x$ ）推广至**无限维算子**的谱理论（泛函分析就是 ∞ 维的数分线代）。

甚至，有一门就叫“线性代数”的课程，直接作为了**生成式人工智能**的**数学基础**：现实世界的一切数据都可以抽象为多维空间中的坐标向量 $\vec{x}$ ，而模型深不可测的“**思考**”过程，本质上就是通过海量参数矩阵 $\mathbf{W}$ 对这些向量进行成千上万次的线性变换运算（ $\vec{y} - \vec{b} = \mathbf{W}\vec{x}$ ）。

为什么要讲线性性？

高中数学中的线性性 (= 齐次性 + 可加性)

最后，值此机会抛砖引玉，稍微提及一下高中数学中存在的线性性 (及其思想)。

① 平面 (空间) 向量基本定理及其线性运算 (人教 A 版必修二 P14)。

② 化乘为加的对数：

$$\log(A \cdot B) = \log(A) + \log(B) \implies \log\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \log(A_i).$$

③ (有限) 离散型随机变量数学期望的可加性 (23 年新课标 I 卷 T21、25 年全国一卷 T14、26 年全国 I 卷 T8)：

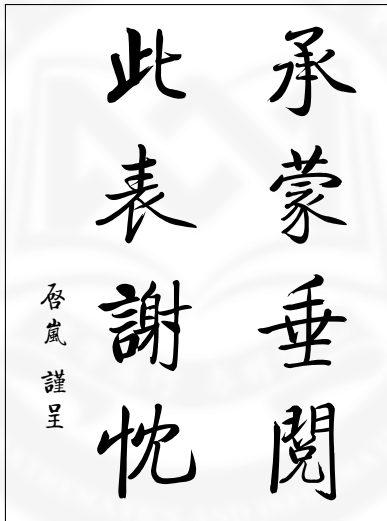
$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i].$$

④ 常系数线性递推数列的通项公式 (19 年理科全国 I 卷 T21、23 年新课标 I 卷 T21)：

$$p_i = \frac{2}{5}p_{i-1} + \frac{1}{2}p_i + \frac{1}{10}p_{i+1}, \quad p_k = \frac{2}{5}p_{k-1} + \frac{1}{5}.$$

謹此

伏望諸位指其疏謬



- [1] 新华社. 习近平主持中央政治局第五次集体学习并发表重要讲话[EB/OL]. (2023-05-29) [2026-04-10]. https://www.gov.cn/yaowen/liebiao/202305/content_6883632.htm.
- [2] 新华社. 中共中央、国务院印发《教育强国建设规划纲要 (2024-2035 年)》[EB/OL]. (2025-01-19) [2026-04-10]. <http://politics.people.com.cn/n1/2025/0119/c1001-40404893.html>.
- [3] 翟嘉祺. 注重从基础到思维的全面培养——基于高考数学内容改革的教学启示[J]. 人民教育, 2025(Z3): 87-89.
- [4] 曹一鸣, 杨嘉镭. 普通高中数学课程标准学业质量标准解读与实施建议[J]. 基础教育课程, 2026(04): 23-28.
- [5] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (2017 年版 2025 年修订) [M]. 日常修订版. 北京: 人民教育出版社, 2025.
- [6] 章建跃. 通过直观理解导数概念感悟极限思想 运用导数研究函数性质解决实际问题[J]. 数学通报, 2021, 60(10): 7-12+66.

- [7] 李善良, 石菁. 灵气·灵动·灵魂——8 分钟说课到底说什么[J]. 数学通报, 2016, 55(10): 1-3+8.
- [8] 人民教育出版社课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书 教师教学用书 数学 选择性必修第二册[M]. 第 1 版. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [9] 王凯, 姚一隼, 黄昭波. 泛函分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2024.
- [10] HUBBARD J H, HUBBARD B B. 向量微积分、线性代数和微分形式: 统一方法: 第 5 版[M]. 李丹, 译. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2024.
- [11] TANTAU T, WRIGHT J, MILETIĆ V. The BEAMER class: User Guide for version 3.77[A/OL]. 2026. <https://sg.mirrors.cicku.me/ctan/macros/latex/contrib/beamer/doc/beameruserguide.pdf>.
- [12] Google LLC. Gemini[Z]. <https://gemini.google.com>. Accessed: 2026-04-10. 2026.