

§5.2.2-1 导数的四则运算法则 (之加减法则)

——高观点下的智慧教学

聂启岚

lanovo@e.gzhu.edu.cn

广州大学 数学与信息科学学院

2026 年 5 月 9 日

1 求导的线性性

基本初等函数导数公式表

$$\textcircled{1} (c)' = 0$$

$$\textcircled{2} (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\textcircled{3} (e^x)' = e^x$$

$$\textcircled{4} (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\textcircled{5} (\sin x)' = \cos x$$

$$\textcircled{6} (\cos x)' = -\sin x$$

$$\textcircled{7} (a^x)' = a^x \ln a$$

$$\textcircled{8} (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

由于我们遇到的绝大部分复杂函数,本质上都是由一些基本函数经过有限次地“**四则运算**”与“**复合运算**”组合而成的,因此,若想降服这些复杂函数,只需完成两件事.

- ① **找到**研究这些**基本函数**的**工具** (并研究);
- ② **找到**这个工具与“函数**四则运算**和**复合运算**”的**关系**.

而在上一节课,我们已经成功地找到并研究了这些基本(初等)函数——**基本初等函数的求导公式**.

本节课,便探究本工具与“函数**四则运算**”之关系.

什么是运算？

在正式开始探究之前，我们不禁有疑问，到底什么是**运算**（求导为什么是运算）？¹ 什么是（求导的）运算（规律）法则？它们有**严谨**定义吗？

比如，四则运算是熟知的，但我们能给出它**严谨**的定义吗？

更进一步，（如）加法运算有什么运算（规律）法则？

交换律、结合律以及与乘法有关的**分配律**。

经过抽象可以发现，所谓的运算，就是“**输入对象—处理—输出新对象**”的过程。

对于该过程，是否感到些许似曾相识？它与我们曾学过的什么概念不谋而合？——**函数**。

下面，不妨先来回顾一下必修一中函数的定义。

¹运算全称为运算对应法则，以前所学的运算法则正是“对应法则”的缩写（如求导运算、加法运算法则）；但此处所讲的求导的运算法则，其更准确的说法应为求导的运算规律法则（如加法交换律）。

回顾函数定义

定义 (函数-人教 A 版必修一 P62)

一般地, 设 A, B 是非空的实数集, 如果对于集合 A 中的任意一个数 x , 按照某种确定的对应关系 f , 在集合 B 中都有**唯一**确定的数 y 和它对应, 那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个**函数** (function), 记作

$$y = f(x), \quad x \in A.$$

其中, x 叫做自变量, x 的取值范围 A 叫做函数的**定义域** (domain); 与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值, 函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in A\}$ 叫做函数的**值域** (range).

这不就是“**输入对象—处理—输出新对象**”的完整过程吗?

从**统一的视角**来看, 函数本质上就是一种**运算**, 而求导也是一种**运算**.

因此, 我们可以类比函数定义, 给出**运算**的定义.

运算的严谨定义

定义 (运算)

一般地, 设 A, B 是非空集合, 如果对于集合 A 中任意取出的一定数量且带有确定顺序的元素, 按照某种确定的对应关系 f , 在集合 B 中都有**唯一**确定的元素 y 和它们对应, 那么就称这种对应关系 f 为一个**运算** (operation), 记作

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad x_1, x_2, \cdots, x_n \in A.$$

若设运算符号为 $*$, 则还可记作

$$y = x_1 * x_2 * \cdots * x_n, \quad x_1, x_2, \cdots, x_n \in A.$$

其中, 参与对应关系的元素叫做**运算对象**, 若运算对象有 n 个, 则称该运算为 n 元运算; 与运算对象相对应的元素 y 叫做**运算结果**, 所有运算结果的集合叫做该运算的结果集.

这个定义**不需要**记忆 (严谨但不完善), 只需大概清楚即可.

加法的严谨定义

例 (实数的加法运算)

设 $A = B = \mathbb{R}$, 如果对于集合 A 中任意取出的 2 个且带有确定顺序的元素 x_1, x_2 , 按照“求这两个数之和”的对应关系 f , 在集合 B 中都有**唯一**确定的元素 y 和它们对应, 那么就称这种对应关系 f 为实数集上的**实数的加法运算**^a, 记作

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

设运算符号为 $+$, 则可记作

$$y = x_1 + x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

其中 x_1, x_2 称为**加数**, y 称为**和**. 由于运算对象有 2 个, 故实数的加法是一个二元运算.

^a此处强调实数, 是因为不止实数有加法运算, 曾学过的向量也有加法运算 (二者显然不同).

同理, 我们可以给出 (数的) 减、乘、除运算定义, 但限于篇幅, 此处不再赘述.

对数运算的定义

例 (对数运算)

设 $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}$, 如果对于集合 A 中任意取出满足特定条件 (第一个数 $\neq 1$) 且带有确定顺序的 2 个元素 a, x , 按照“求以 a 为底 x 的对数”的对应关系 f , 在集合 B 中都有**唯一**确定的元素 y 和它们对应, 那么就称这种对应关系 f 为实数集上的**对数运算**, 记作

$$f(a, x) = \log_a x, \quad a \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \quad x \in (0, +\infty).$$

设运算符号为 $\log$, 则可记作

$$y = \log_a x.$$

其中, a 称为**底数**, x 称为**真数**, y 称为**对数**. 由于参与对应关系的运算对象有 2 个, 故对数运算是一个二元运算.

同理, 还可以给出指数运算、幂运算的定义 (B 版教材的确将这些称为“运算”, 可自行查看).

上述都是一些熟知的运算,但也可以定义一些不太熟知的运算(如 2023 年四省联考压轴).

22. (12 分)

椭圆曲线加密算法运用于区块链.

椭圆曲线 $C = \{(x, y) | y^2 = x^3 + ax + b, 4a^3 + 27b^2 \neq 0\}$. $P \in C$ 关于 x 轴的对称点记为 $\tilde{P}$.

C 在点 $P(x, y) (y \neq 0)$ 处的切线是指曲线 $y = \pm\sqrt{x^3 + ax + b}$ 在点 P 处的切线. 定义

“ $\oplus$ ”运算满足: ①若 $P \in C, Q \in C$, 且直线 PQ 与 C 有第三个交点 R , 则 $P \oplus Q = \tilde{R}$;

②若 $P \in C, Q \in C$, 且 PQ 为 C 的切线, 切点为 P , 则 $P \oplus Q = \tilde{P}$; ③若 $P \in C$, 规定

$P \oplus \tilde{P} = 0^*$, 且 $P \oplus 0^* = 0^* \oplus P = P$.

(1) 当 $4a^3 + 27b^2 = 0$ 时, 讨论函数 $h(x) = x^3 + ax + b$ 零点的个数;

(2) 已知“ $\oplus$ ”运算满足交换律、结合律, 若 $P \in C, Q \in C$, 且 PQ 为 C 的切线, 切点为 P , 证明: $P \oplus P = \tilde{Q}$;

(3) 已知 $P(x_1, y_1) \in C, Q(x_2, y_2) \in C$, 且直线 PQ 与 C 有第三个交点, 求 $P \oplus Q$ 的坐标.

参考公式: $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$

图: 2023 年新高考适应性测试第 22 题

运算规律法则

但归根到底, 这些只是“**运算对应法则**”, 对于运算的另一个重要概念“**运算规律法则**”, 我们还没有一个清晰的认识 (如加法的交换律).

定义 (运算规律法则)

设 $*$ 是定义在非空集合 A 上的一个 n 元运算. 对于集合 A 中任意取出且带有确定顺序的 n 个元素 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 规定得出其唯一对应结果的具体代数表达式 (或计算规则) E , 称为该运算的**运算规律法则**, 通常记作

$$x_1 * x_2 * \dots * x_n := E(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

其中, 符号 $:=$ 表示“定义为”.

运算 (规律) 法则这个概念在 B 版必修二中一直被提到, 但却始终没有一个**严谨定义**.

常见的运算规律

例 (实数加法交换律)

对于实数集 $\mathbb{R}$ 上的加法运算, 恒有等式

$$a + b = b + a, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

此恒等式即为实数加法运算的**交换律**.

例 (对数运算的乘法运算法则)

设底数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 真数 $x, y > 0$, 对数运算的乘法法则由以下等式给出:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$$

进一步, 若记 $f(x) = \log_a x$, 则有

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y).$$

对数运算乘法法则的应用

所有有关对数的恒等式, 其本质都运用到了对数运算的乘法法则. 比如, 结合“**算两次**”的数学思想方法, 可以得到以下公式.

例 (换底公式)

对代数式 $a^x = b$, 两边取以 a 为底的对数, 可得

$$x = \log_a b,$$

两边再取以 c 为底的对数, 可得

$$x \log_c a = \log_c a^x = \log_c b,$$

因此, 就得到了**换底公式**

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

(注: 还可以通过式子 $\log_c a \cdot \log_a b = \log_a a \cdot \log_c b$ 辅助记忆, 感受真正的“**交换底数**”。)

求导即运算

自然地, 本章内容的核心内容: **求导**, 也可以被看作是一种**运算**.

定义 (求导运算)

设 A 是定义在某区间上的可导函数集合, 若对任意的 $f(x) \in A$, 均由极限表达式

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

唯一确定其对应的一个新函数 $f'(x)$, 则称该对应关系 (即 $'$) 为集合 A 上的**求导运算**, 记作

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

因此, 我们也可以探究求导的**运算规律法则**.

并且, 上节课所学的内容, 其实就**已涉及到了**求导的运算 (规律) 法则².

²下面的表述统一为教材中的“求导/导数的运算法则”.

回顾公式表

基本初等函数导数公式表

① $(c)' = 0$

② $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

③ $(e^x)' = e^x$

④ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

⑤ $(\sin x)' = \cos x$

⑥ $(\cos x)' = -\sin x$

⑦ $(a^x)' = a^x \ln a$

⑧ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

表中有足足八个公式，死记硬背似乎并非好的举措。

至少有两组公式，在**形式**上是及其相似的——它们内部真的没有联系吗（刚刚复习了什么公式）？

先从相对简单的一组开始分析，使用刚才复习过的**换底公式**，可以发现

$$\left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x \right)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

而右侧的式子，结合 $\ln x$ 的求导公式，可以写成

$$\frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)'.$$

特殊与一般的对数函数求导公式间的联系

即

$$\left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)'$$

又 $\ln a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 因此可以设 $c = \frac{1}{\ln a} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 从而有

$$(c \cdot \ln x)' = c \cdot (\ln x)', \quad c \neq 0,$$

并且, 在 $c = 0$ 时上述式子也成立, 也就是说

$$(c \cdot \ln x)' = c \cdot (\ln x)', \quad c \in \mathbb{R}.$$

在公式表绝对正确的前提下, 这个式子似乎在暗示: 求导运算具有“**提取常数**”的性质.

结合上面对“运算法则”的定义, 我们可以**猜测并验证**以下定理正确性. (类比推理)

定理 (求导运算的数乘运算法则)

设 $c \in \mathbb{R}$ 为与 x 无关的常数, 函数 $f(x)$ 可导, 则

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x).$$

即一个函数的常数倍的导数, 等于这个常数乘以这个函数的导数, 称为求导的**齐次性**.

目前, 能够使用的证明方法别无他选, 有且只有求导的定义. (即证左侧函数的导数为右式)

证明.

将 $c \cdot f(x)$ 整体看作为一个新的函数, 根据求导的定义, 有

$$\begin{aligned}[c \cdot f(x)]' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} \\&= c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\&= c \cdot f'(x).\end{aligned}$$



牛刀小试

需要补充的是, 上述的证明过程**不需要掌握**, 因为**系统的极限理论**, 在高中阶段**并不会涉及**.
尽管证明过程不能细究, 但对于法则本身, 我们可以通过一些例子来体会它的意义所在.

例 (只使用齐次性也能算出结果的例子)

- ① 求特殊一次函数 (即正比例函数) $y = kx$ 的导数.
- ② 求 $y = e^{x+2}$ 的导数.
- ③ 求 $f(x) = 2 \sin^3 x + \sin x \cdot (\cos 2x - 1)$ 的导数.

解答.

- ① $y' = (kx)' = k(x)' = k.$
- ② $y' = (e^{x+2})' = e^2(e^x)' = e^2 \cdot e^x = e^{x+2}.$
- ③ $f'(x) = (2 \sin x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x))' = 2(\sin x)' = 2 \cos x.$



正比例函数与导数

由例题不免联想：正比例函数的导数为**常数**，那这个常数是正比例函数的什么？有何意义？
这个常数恰为正比例函数的**比例系数**，也即其图像对应直线的**斜率**。

导数、斜率，你能进一步联想到什么吗？正是**导数的几何意义**。

定理 (导数的几何意义-B 版选必三 P72)

对可导函数 $f(x)$ ，其在某一点处的**导数值** $f'(x_0)$ 就是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处 (也称在 $x = x_0$ 处) 的切线的**斜率**，从而根据直线的点斜式方程可知，切线的方程是

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

切线是**割线**的极限，**割线**又是在曲线上连接两点的直线 (两点确定一条直线)。

因此，对于正比例函数而言，在其图像上任取两点所形成的**割线**，都是函数 (所对应的直线) 本身。进一步，**切线**是否也是正比例函数本身？**切线斜率** (即导数值) 此时是多少？(k .)

一次函数的导数

既然特殊的一次函数的导数为常数, 那一般的一次函数 $y = kx + b$ 的导数会是多少?

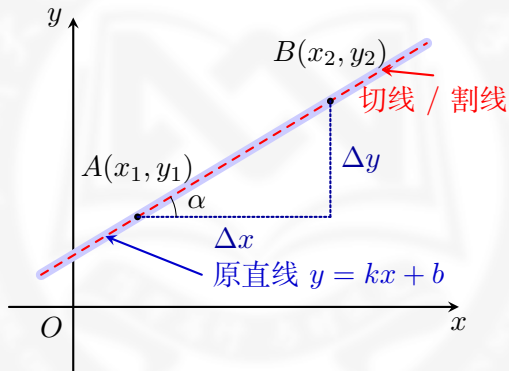


图: 一次函数“三线合一”示意图

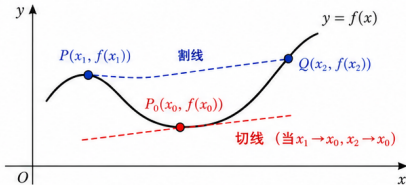
由于“直线 $y = kx + b$ ”——“切线”——“割线”三者重合, 因此一次函数的导数即直线斜率 k .

一次函数的导数 = 自己的斜率 k

核心思想



- 导数、切线与割线的几何关联：
函数在某一点的**导数值**，等价于图像在该点处**切线的斜率**。
- 切线可以视作**割线**的特殊状态：
在函数图像上取两个不同的点连成一条割线，当这两个点完全重合为一点时，这条割线便转化为该点处的**切线**。



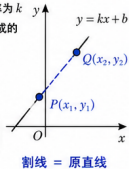
数学虽难，
但我会努力的！



蓝色虚线：割线（两点确定）
红色虚线：切线（极限位置）
黑色曲线：函数图像

1 一次函数的“三线合一”特征 —— 割线

对于一次函数 $y = kx + b$ ，图像是一条斜率为 k 的直线。在直线上任取两点 P, Q ，它们连成的**割线**必然与原直线完全重合。

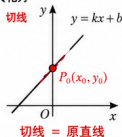


两点确定一条直线，
而这条直线就是它自己！

割线 = 原直线

2 一次函数的“三线合一”特征 —— 切线

既然割线在任何状态下都与原直线保持同一，那么当割线上的两点合二为一，割线转化为切线时，这种同一性并未改变。因此，**切线**同样与原直线完全重合。

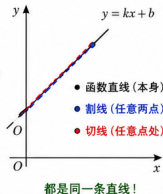


合并一下，还是
这条直线，没变！

切线 = 原直线

3 三线合一

于是，一次函数的函数直线本身、任意割线与任意点处的切线，三者几何体上完全是同一条直线！



三线合一，
天下归一条线！

都是同一条直线！

结论



基于客观实体上的同一性，三线的倾斜程度必然完全一致。
已知一次函数直线的斜率恒为 k ，
因此其在任意一点处切线的斜率同样恒为 k 。



导数值 = 切线斜率（定义）



最终结论：

一次函数 $y = kx + b$ 的导数，
就是其自身的斜率 k 。

$$(kx + b)' = k$$



就这？
也太简单了吧！

特殊与一般的一次函数求导公式间的联系

因此, 我们可以得出公式

$$(kx + b)' = k.$$

这似乎在告诉我们, **无论**有没有常数 b , 一次函数的导数**都**为其斜率 k .

这**看上去**是一个非常合理的结论, 但参数 b 真的不会对导数造成“**影响**”吗?

不妨看看, 对参(常)数 b 直接求导的结果是什么: $b' = 0$.

影响为 0 与没有影响**是两回事** (如集合 $\emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$ 的区别)!

如果我们不忽略 b 的影响, 似乎就有如下式子成立:

$$(kx + b)' \xrightarrow{\text{几何意义}} k = k + 0 = \textcolor{red}{(kx)'} + \textcolor{red}{(b)'}$$

在几何意义绝对正确的前提下, 这个式子似乎在暗示: 求导运算具有“**可拆分**”的性质.

结合上面对“运算法则”的定义, 我们又可以**猜测并验证**以下定理正确性. (类比推理)

定理 (函数和的求导法则)

一般地, 若 $f(x)$, $g(x)$ 都可导, 则

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

即两个函数之和的导数, 等于这两个函数的导数之和.

证明.

将 $f(x) + g(x)$ 整体看作为一个新的函数, 根据求导的定义, 有

$$\begin{aligned}[f(x) + g(x)]' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\&= f'(x) + g'(x).\end{aligned}$$

□

其中, 函数和的求导法则也被称为**求导的加法法则**或**求导运算的可加性**(可视化几何意义).

加法与减法

上述的证明过程依旧**不需要掌握**, 因为涉及到了极限, **理解**即可.

提到加法, 能条件反射想到的概念会是什么? 大概率是对偶的减法.

接下来是要像上面那般 (利用导数定义) 去验证求导的减法法则吗? 不!

在数学的体系中, **减法**往往**不需要**被定义为一种完全独立的新运算. 不妨回顾一下, 在学习**实数**或**平面向量**时曾建立过的观念: 减去一个量, 在代数上等价于加上这个量的**相反数**.

也就是说, 减法本质上是加法与数乘的结合. 即, 对于任意拥有加法和乘法的对象 a 和 b , 存在恒等式:

$$a - b = a + (-1) \cdot b.$$

既然减法可以被**无缝拆解**为**加法和数乘**, 而上面又确立了求导的加法法则 (可加性) 与数乘法则 (齐次性), 那么函数差的求导法则也就**水到渠成**了.

定理 (函数差的求导法则)

一般地, 若 $f(x)$, $g(x)$ 都可导, 则

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x).$$

即两个函数之差的导数, 等于这两个函数的导数之差.

证明.

将 $f(x) - g(x)$ 整体看作为一个新的函数, 直接求导, 有

$$\begin{aligned}[f(x) - g(x)]' &= [f(x) + (-1) \cdot g(x)]' \\&= f'(x) + [(-1) \cdot g(x)]' && \text{(求导的可加性)} \\&= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) && \text{(求导的齐次性)} \\&= f'(x) - g'(x).\end{aligned}$$

□

这次的证明, 并不超纲. 当然, 若用定义法去验证, 依旧超纲.

线性性

加、减与数乘这三种运算并不孤立, 而是相互联系的. 那么, 这三种运算的联系是什么?

定理 (向量的线性运算-人教 A 版必修二 P14)

向量的加、减、数乘运算统称为向量的**线性运算**, 向量线性运算的结果仍是向量. 也就是说, 对于任意向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 以及任意实数 λ, μ_1, μ_2 , 恒有

$$\lambda(\mu_1\vec{a} \pm \mu_2\vec{b}) = \lambda\mu_1\vec{a} \pm \lambda\mu_2\vec{b}.$$

类比该定义, 求导运算的**可加性与齐次性**便可合称为**求导运算的线性性**.

定理 (求导运算的线性性)

设 $f(x), g(x)$ 都可导, $c \in \mathbb{R}$ 为与 x 无关的常数, 则

$$[c \cdot f(x) \pm g(x)]' = c \cdot f'(x) \pm g'(x).$$

由求导运算的可加性与齐次性, 请自行证明线性性的成立.

牛刀小试

请只使用求导的线性性计算

请完成下面的练习题, 以加深对求导运算法则的理解.

例 (函数求导运算法则练习)

- ① 计算 $y = \ln(2x^3 \cdot e^{2x})$ 的导数;
- ② 求函数 $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$ 的导数;
- ③ 求 $g(x) = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i} x^i$ 的导数.

(注: 还记得符号 $\sum$ 吗? 它叫做求和符号, 代表着对某代数式的求和. 例如, $\sum_{n=1}^{10} n$ 就是 $1 + 2 + \cdots + 10$ 的意思, 在必修二的 P178 (统计板块) 中首次抛头露面.)

解答.

① 对数运算: $y' = [\ln(2x^3) + \ln(e^{2x})]' = [\ln 2 + 3 \ln x + 2x]' = \frac{3}{x} + 2;$

② 辅助角公式:

$$f'(x) = (\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{6})' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = -\sin(x + \frac{\pi}{6});$$

③ 求和即加法: $g'(x) = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{i} x^i\right)' = \sum_{i=1}^{10} x^{i-1} = \sum_{j=0}^9 x^j = x^9 + x^8 + \cdots + x + 1.$ □

由第三小题的结果可以启发我们, 可加性并**不限于**两个函数的加法, 还可以推广到**任意有限个函数**的加法. (当然, 涉及到自然数的严格证明必然绕不开数学归纳法, 证明略但不超纲.)

定理 (求导运算的可加性推广-人教 B 版选必三 P82)

设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 都可导, 则

$$[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]' = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x).$$

求导运算的乘法法则

本节完

此间内容已尽，余韵留待诸君品思。

内容虽繁，无须尽纳；求知毋急，徐徐图之。

今有生成式人工智能技术辅助教学，遇疑可询。欲预习亦可借重：**加减运算**之后，复为何种运算？正乃乘也。

本课所言**数乘**固属**乘法**，然求导之乘法法则所涉乘法，又作何解？（其运算对象有何殊异？）且问：**乘法法则**当循何等运算规律法则？莫非

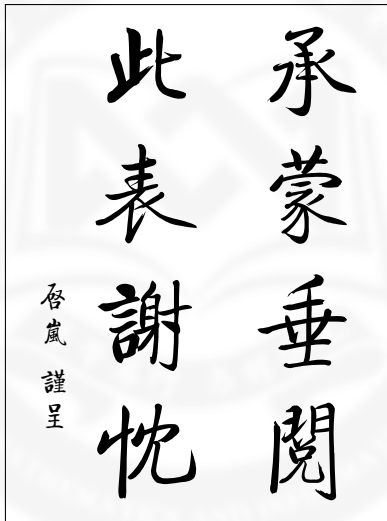
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

乎？若其不然，当何以证其非？此诸般关窍，皆俟下节课详析。

（注：齐次性命名之由来，线性性之深意，有心探微者，课后请益于师可也。）

謹此

伏望諸位指其疏謬



- [1] 新华社. 习近平主持中央政治局第五次集体学习并发表重要讲话[EB/OL]. (2023-05-29) [2026-05-09]. https://www.gov.cn/yaowen/liebiao/202305/content_6883632.htm.
- [2] 新华社. 中共中央、国务院印发《教育强国建设规划纲要 (2024-2035 年)》 [EB/OL]. (2025-01-19) [2026-05-09]. <http://politics.people.com.cn/n1/2025/0119/c1001-40404893.html>.
- [3] 郑学安, 薛宗慈, 唐仲伟. 数学分析: 第 3 卷[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2018.
- [4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (2017 年版 2025 年修订) [M]. 日常修订版. 北京: 人民教育出版社, 2025.
- [5] 章建跃. 通过直观理解导数概念感悟极限思想 运用导数研究函数性质解决实际问题[J]. 数学通报, 2021, 60(10): 7-12+66.
- [6] 赵轩, 翟嘉祺, 郭淑媛. 深化关键能力考查助力创新人才选拔——2023 年高考数学新课标 □ 卷评析[J]. 数学通报, 2023, 62(08): 1-3+15.

- [7] 梁贯成. AI 时代的高质量数学教育[J]. 数学通报, 2026, 65(01): 1-3+16.
- [8] 潘小明. 人工智能时代的数学教育：为何？何为？如何？ [J]. 数学通报, 2026, 65(03): 1-7+38.
- [9] 人民教育出版社课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书·数学·必修·第一册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [10] 人民教育出版社课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书·数学·必修·第二册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [11] 人民教育出版社课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书·数学·选择性必修·第二册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [12] 人民教育出版社课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书 教师教学用书 数学 选择性必修第二册[M]. 第 1 版. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [13] 人民教育出版社课程教材研究所, 中学数学教材实验研究组. 普通高中教科书·数学（B 版）·必修·第二册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.

- [14] 人民教育出版社课程教材研究所, 中学数学教材实验研究组. 普通高中教科书·数学 (B 版)·选择性必修·第三册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [15] 普通高中教科书·数学·选择性必修·第二册[M]. 长沙: 湖南教育出版社, 2019.
- [16] 上海市中小学 (幼儿园) 课程改革委员会. 普通高中教科书·数学·选择性必修·第二册[M]. 上海: 上海教育出版社有限公司, 2022.
- [17] 教育部教育考试院. 高考试题分析: 2024 年版. 数学[M]. 北京: 语文出版社, 2023.
- [18] TANTAU T, WRIGHT J, MILETIĆ V. The BEAMER class: User Guide for version 3.77[A/OL]. 2026. <https://sg.mirrors.cicku.me/ctan/macros/latex/contrib/beamer/doc/beameruserguide.pdf>.
- [19] Google LLC. Gemini[Z]. <https://gemini.google.com>. Accessed: 2026-05-09. 2026.